

Układy równań liniowych

Zad. 1 Stosując odpowiednie operacje oblicz rząd macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -6 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Zad. 2 Stosując twierdzenie Kroneckera-Capellego sprawdź ile podany układ równań ma rozwiązań:

$$\text{a) } \begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1-2x_3=2 \\ 2x_1-x_2=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x+2y-z+2w=0 \\ 2x+4y+3z-6w=5 \\ -x-2y+2z-4w=1 \end{cases}$$

Zad. 3 Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-3y+5z=-5 \\ -x+2y-z=2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x+z=2 \\ -2y+3z=-2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Zad. 4 Rozwiązać układy równań z zad. 3 metodą macierzy odwrotnej.

Zad. 5 Rozwiąż układ równań korzystając z metody eliminacji Gaussa-Jordana:

$$\text{a) } \begin{cases} x+2y+z+w=7 \\ 2x-y-z+4w=2 \\ 5x+5y+2z+7w=1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x+2y+3z+w=1 \\ 2x+4y-z+2w=2 \\ 3x+6y+10z+3w=3 \\ x+y+z+w=0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} a+b+2c=-1 \\ 2a-b+2c=-4 \\ 4a+b+4c=-2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} m+n+p=2 \\ 2m-n-p=4 \\ 3m-4n-5p=6 \\ m-2n-3p=8 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ 5x-y+3z=3 \\ 7x-2y+4z=5 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 3x_1+x_2+2x_3=11 \\ 2x_1+3x_2+x_3=11 \end{cases} \quad \text{g) } \begin{cases} 2a-4b+3c=1 \\ a-2b+4c=3 \\ 3a-b+5c=2 \end{cases}$$

Zad. 6 Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań jednorodnego układu liniowego:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x-y-z-3t=0 \\ -x+y+2z-t=0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1-4x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-9x_3+12x_4=0 \\ 3x_1+x_2-4x_3+2x_4=0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x-y+3z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \\ -x+2y-z-2=0 \\ 3x-2y+4z-5=0 \end{cases}$$

Zad. 7 Rozwiąż niejednorodne układy równań znajdując jedno z ich rozwiązań szczególnych oraz fundamentalne zbiory rozwiązań odpowiednich układów jednorodnych

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

Zad. 8 Przedyskutować ilość rozwiązań układu w zależności od parametru m

$$\text{a) } \begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx - (2m - 3)y + 3 = 0 \\ (2m + 5)x + (m + 6)y = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ mx - y + z = 0 \\ 3x + y + mz = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ mx - y = 1 \\ 2x + y = m \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} mx - y + z = 1 \\ x - my + z = 1 \\ 3x - 3y + 2z = 2m \end{cases}$$

Zad. 9 Dietetyk planuje posiłek na bazie trzech składników zawierających białko, tłuszcz i pewną wartość energetyczną. Zawartość białka, tłuszczu i kaloryczności w 100 g dla składnika I jest następująca: 10g białka, 20g tłuszczu, 300 kalorii, dla składnika II: 10g białka, 20g tłuszczu, 100 kalorii, dla składnika III: 20g białka, 100 kalorii. Jaki powinien być skład posiłku, gdy ma on zawierać dokładnie 100g białka, 80g tłuszczu i mieć 900 kalorii?

Zad. 10 Trzech agentów handlowych sprzedaje artykuły A, B i C. Pierwszy agent sprzedał 6 jednostek artykułu A, 2 jednostki B oraz jednostkę C. Drugi agent sprzedał 3 jednostki A oraz jednostkę artykułu B. Natomiast trzeci agent sprzedał po 3 jednostki artykułu A oraz B i 2 jednostki artykułu C. Wpływy (w tys. zł) ze sprzedaży dla poszczególnych agentów są następujące: agent I - 17, agent II - 7, agent III - 24. Wyznaczyć ceny poszczególnych artykułów.